Examen parcial 2 - MA1116

1. (9 ptos) Considere los planos

$\pi_1 : x_1 + 2x_2 + 3kx_3 = 2, \qquad \pi_2 : -x_1 + kx_2 - x_3 + 4 = 0, \qquad \pi_3 : 10x_1 + 20x_2 + 5\big(k+3\big)x_3 - 5k = 17.$

Encuentre el valor o los valores de k, para los cuales

(a) Los planos se intersectan en un punto.
(b) Los planos se intersectan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta.
(c) No se intersectan.

Solución : Consideramos el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3kx_3 = 2 \\ -x_1 + kx_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + 4x_2 + \big(k+3\big)x_3 = k + \dfrac{17}{5} \end{cases}$$

Así, la matriz asociada al sistema y la matriz recurso son las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3k \\ -1 & k & -1 \\ 2 & 4 & k+3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ k + \dfrac{17}{5} \end{pmatrix}.$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $\big[\, A \,|\, \boldsymbol{b} \,\big]$, para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3k & 2 \\ -1 & k & -1 & -4 \\ 2 & 4 & k+3 & k+\dfrac{17}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2 \longrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3k & 2 \\ 0 & k+2 & 3k-1 & -2 \\ 2 & 4 & k+3 & k+\dfrac{17}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2F_1+F_3 \longrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3k & 2 \\ 0 & k+2 & 3k-1 & -2 \\ 0 & 0 & -5k+3 & k-\dfrac{3}{5} \end{array}\right).$$

Si consideramos la matriz equivalente de la matriz asociada al sistema A, es decir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3k \\ -1 & k & -1 \\ 2 & 4 & k+3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_{\text{equiv}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3k \\ 0 & k+2 & 3k-1 \\ 0 & 0 & -5k+3 \end{pmatrix}$$

y las operaciones elementales sobre las filas de la A, concluimos que

$$\left|A\right| = (1)(k+2)(-5k+3),$$

entonces de aquí, se obtiene

(a) Si $\left|A\right| \neq 0$, entonces el sistema tiene **una única solución** y, por ende, los planos se intercectan en un **solo punto**. Esto ocurre si

$$k \neq -2 \qquad \text{y} \qquad k \neq \frac{3}{5},$$

es decir, los planos se intersectan en un **solo punto** si

$$k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{3}{5}\right\}.$$

(b) Si $k = \dfrac{3}{5}$. Sustituimos en la matriz aumentada equivalente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3\left(\frac{3}{5}\right) & 2 \\ 0 & \left(\frac{3}{5}\right)+2 & 3\left(\frac{3}{5}\right)-1 & -2 \\ 0 & 0 & -5\left(\frac{3}{5}\right)+3 & \left(\frac{3}{5}\right)-\frac{3}{5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{9}{5} & 2 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{4}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De la fila 2, se tiene que

$$\frac{13}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = -\frac{10}{13} - \frac{4}{13}x_3.$$

De la fila 1, se tiene que

$$x_1 + 2x_2 + \frac{9}{5}x_3 = 2,$$

como $x_2 = -\dfrac{10}{13} - \dfrac{4}{13}x_3$, obtenemos

$$x_1 + 2x_2 + \frac{9}{5}x_3 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 + 2\left(-\frac{10}{13} - \frac{4}{13}x_3\right) + \frac{9}{5}x_3 = 2$$

$$\Longrightarrow \qquad x_1 - \frac{20}{13} - \frac{8}{13}x_3 + \frac{9}{5}x_3 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 - \frac{20}{13} + \frac{77}{65}x_3 = 2$$

$$\Longrightarrow \qquad x_1 = 2 + \frac{20}{13} - \frac{77}{65}x_3 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{46}{13} - \frac{77}{65}x_3,$$

entonces, el sistema tiene **infinitas soluciones**, por lo que los planos se intersectan en una **recta**, la cual viene dada por

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{46}{13} - \dfrac{77}{65}t \\ x_2 = -\dfrac{10}{13} - \dfrac{4}{13}t. \\ x_3 = t \end{cases}$$

(c) Si $k = -2$. Sustituimos en la matriz aumentada equivalente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3(-2) & 2 \\ 0 & (-2)+2 & 3(-2)-1 & -2 \\ 0 & 0 & -5(-2)+3 & (-2)-\dfrac{3}{5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -\dfrac{13}{5} \end{array}\right).$$

De la fila 3, se tiene que

$$13x_3 = -\frac{13}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad x_3 = -\frac{1}{5}.$$

De la fila 2, se tiene que

$$-7x_3 = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_3 = \frac{2}{7},$$

es decir $x_3 = -\dfrac{1}{5}$ y $x_3 = \dfrac{2}{7}$, lo que es una **contradicción**, por lo tanto, el sistema **NO tiene solución**, por lo que los planos **NO se intersectan**.

■

2. (9 ptos) Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m+1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Hallar el valor o los valores de m para los cuales S sea una base para $M_{2\times 2}$.

Solución : Puesto que, el espacio vectorial $M_{2\times 2}$ tiene dimesnión 4, entonces basta con encontrar el valor o los valores de m para los cuales los vectores

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m+1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} m & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sean linealmente independientes. Así, consideramos la combinación lineal

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \alpha_3 \boldsymbol{v_3} + \alpha_4 \boldsymbol{v_4} = \boldsymbol{0},$$

de aquí,

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m+1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} m & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_1 \\ (m+1)\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_2 & m\alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\alpha_3 & -4\alpha_3 \\ 2\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 + m\alpha_3 & 2\alpha_1 + m\alpha_2 - 4\alpha_3 \\ (m+1)\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puesto que, dos matrices son iguales si son del mismo tamaño y son iguales componentes a componentes, de aquí, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 - \alpha_2 + m\alpha_3 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + m\alpha_2 - 4\alpha_3 & = & 0 \\ (m+1)\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

En vista que buscamos independencia lineal, entonces buscamos cuando el sistema tenga solución única (solución trivial), para ello calculamos el determinante de la matriz asociada al sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ 2 & m & -4 & 0 \\ m+1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y hallamos los valores de m, tales que el determinante sea diferente de cero, así,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ 2 & m & -4 & 0 \\ m+1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0)A_{14} + (0)A_{24} + (0)A_{34} + (2)A_{44} = 2A_{44}$$

$$= 2(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & -4 \\ m+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & -4 \\ m+1 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

donde

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & -4 \\ m+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)A_{11} + (-1)A_{12} + (m)A_{13} = A_{11} - A_{12} + mA_{13}$$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} + m(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & m \\ m+1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2m + 4 + 4 + 4(m+1) + m\Big(2 - m(m+1)\Big)$$

$$= 2m + 8 + 4(m+1) + 2m - m^2(m+1) = 4m + 8 + 4(m+1) - m^2(m+1)$$

$$= 4(m+2) + (4-m^2)(m+1) = 4(m+2) + (2-m)(2+m)(m+1)$$

$$= (m+2)\Big(4 + (2-m)(m+1)\Big) = (m+2)\Big(4 + 2 + m - m^2\Big)$$

$$= (m+2)\Big(6 + m - m^2\Big) = (m+2)(m+2)(3-m) = (m+2)^2(3-m).$$

Luego

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ 2 & m & -4 & 0 \\ m+1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(m+2)^2(3-m).$$

Entonces

$$(m+2)^2(3-m) \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \neq 3 \quad \text{y} \quad m \neq -2.$$

Luego, el conjunto S forma una base para $M_{2\times 2}$, si $m \in \mathbb{R} \setminus \Big\{-2, 3\Big\}$. ■

(b) Halle el valor o los valores de m para los cuales la dimensión del subespacio generado por S sea igual a 2.

Solución : Para que la dimensión del subespacio generado por S, $W = \text{gen}\left[S\right]$, sea igual a 2 la base de dicho subespacio W debe contener dos vectores. Observemos que basta encontrar dos vectores L.I., ya que la generación del subespacio está garantizada por ser un subespacio generado.

Si $m = -2$, sustituimos en la matriz asociada al sistema homogéneo (combinación lineal que garantiza la independencia lineal de los vectores $\boldsymbol{v_i}$, con $i = 1, 2, 3, 4$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & (-2) & 0 \\ 2 & (-2) & -4 & 0 \\ (-2)+1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz A, para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1+F_2 \longrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1+F_3 \longrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_4 \longrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que se obtienen dos pivotes, puesto que, la existencia de los pivotes garantiza la independencia lineal de los vectores involucrados, podemos concluir que hay dos vectores linealmente independientes.

Luego, si $m = -2$ el subespacio generado por S, $W = \text{gen}\left[S\right]$, tiene dimensión 2. ■

(c) Para $m = 3$, encuentre las condiciones que deben satisfacer las matrices que pertenecen al subespacio generado por S.

Solución : Sea $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una vector genérico perteneciente a $W = \text{gen}\left[S\right]$.

Consideramos la combinación lineal

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \alpha_3 \boldsymbol{v_3} + \alpha_4 \boldsymbol{v_4} = \boldsymbol{v},$$

de aquí,

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ (3)+1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & (3) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} (3) & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

al desarrolla se obtiene

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

puesto que, dos matrices son iguales si son del mismo tamaño y son iguales componentes a componentes, de aquí, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3 = b \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = c \\ \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = d. \end{cases}$$

Aplicamos operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada $\left[\beta A \,|\, \boldsymbol{v}\right]$, para transformar dicha matriz en una versión de su forma escalonada (método de eliminación gaussiana)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & a \\ 2 & 3 & -4 & 0 & b \\ 4 & 1 & 2 & 0 & c \\ 1 & 0 & 1 & 2 & d \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2 \longrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 5 & -10 & 0 & b-2a \\ 4 & 1 & 2 & 0 & c \\ 1 & 0 & 1 & 2 & d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-4F_1+F_3 \longrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 5 & -10 & 0 & b-2a \\ 0 & 5 & -10 & 0 & c-4a \\ 1 & 0 & 1 & 2 & d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 5 & -10 & 0 & b-2a \\ 0 & 5 & -10 & 0 & c-4a \\ 1 & 0 & 1 & 2 & d \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_4 \longrightarrow F_4} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 5 & -10 & 0 & b-2a \\ 0 & 5 & -10 & 0 & c-4a \\ 0 & 1 & -2 & 2 & d-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & -1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 2 & d-a \\ 0 & 5 & -10 & 0 & c-4a \\ 0 & 5 & -10 & 0 & b-2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-5F_2+F_3 \longrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 2 & d-a \\ 0 & 0 & -10 & 0 & a+c-5d \\ 0 & 5 & -10 & 0 & b-2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-5F_2+F_4 \longrightarrow F_4} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 2 & d-a \\ 0 & 0 & -10 & 0 & a+c-5d \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 3a+b-5d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_3+F_4 \longrightarrow F_4} \left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 2 & d-a \\ 0 & 0 & -10 & 0 & a+c-5d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+b-c \end{array}\right).$$

Entonces, para garantizar la consistencia del sistema de ecuaciones no homogéneo, se debe cumplir

$$2a+b-c=0.$$

Así, la matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deben satisfacer que

$$2a+b-c=0, \qquad \text{es decir} \qquad c=2a+b,$$

por lo que

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+b & d \end{pmatrix}.$$

■

3. (8 ptos) Sea $W = \left\{ p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{P}_2 \ / \ a_0 + a_2 = 2a_1, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{P}_2$.

Demostración : En primer lugar, demostremos que $\boldsymbol{W \neq \varnothing}$.

Consideramos el polinomio $0(x) = 0x^2 + 0x + 0$, entonces

$$0 + 0 = 2(0),$$

se cumple la condición de W, por lo que, $0(x) \in W$.

Luego, $\boldsymbol{W \neq \varnothing}$.

Veamos, a continuación la **cerradura bajo la suma**. Sean $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ en W, entonces se satisface

$$a_0 + a_2 = 2a_1 \qquad \text{y} \qquad b_0 + b_2 = 2b_1.$$

Así,

$$p(x) + q(x) = \left(a_2x^2 + a_1x + a_0\right) + \left(b_2x^2 + b_1x + b_0\right) = \left(a_2 + b_2\right)x^2 + \left(a_1 + b_1\right)x + \left(a_0 + b_0\right),$$

de aquí,

$$\left(a_0 + b_0\right) + \left(a_2 + b_2\right) = \left(a_0 + a_2\right) + \left(b_0 + b_2\right) = 2a_1 + 2b_1 = 2\left(a_1 + b_1\right),$$

se cumple la condición para que $p(x) + q(x)$ pertenezca a W, por lo que W es **cerradura bajo la suma**.

Veamos la **cerradura bajo la multiplicación por un escalar**. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar y $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ en W, entonces se cumple

$$a_0 + a_2 = 2a_1.$$

Así,

$$\alpha p(x) = \alpha\left(a_2x^2 + a_1x + a_0\right) = \alpha a_2x^2 + \alpha a_1x + \alpha a_0,$$

veamos si se cumple la condición para que $\alpha p(x) \in W$

$$\alpha a_0 + \alpha a_2 = \alpha\left(a_0 + a_2\right) = \alpha\left(2a_1\right) = 2\alpha a_1,$$

se cumple la condición, por lo que concluimos que $\alpha p(x) \in W$.

Concluimos que W es **cerradura bajo la multiplicación por un escalar**.

Luego, W es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2$. ■

(b) Encuentre una base y la dimensión de W.

Solución : Sea $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ un vector genérico de W, entonces se cumple

$$a_0 + a_2 = 2a_1, \qquad \text{de aquí,} \qquad a_2 = 2a_1 - a_0,$$

así,

$$\begin{aligned} p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 &= \big(2a_1 - a_0\big)x^2 + a_1x + a_0 \\ &= 2a_1x^2 - a_0x^2 + a_1x + a_0 = a_1\big(2x^2 + x\big) + a_0\big(1 - x^2\big), \end{aligned}$$

entonces,

$$p(x) = a_1\big(2x^2 + x\big) + a_0\big(1 - x^2\big),$$

es decir, hemos escrito un vector genérico de W como combinación lineal de los vectores

$$p_1(x) = 2x^2 + x \qquad \text{y} \qquad p_2(x) = 1 - x^2,$$

con coeficientes

$$\alpha_1 = a_1, \qquad \text{Coeficiente del término } x \text{ del polinomio.}$$

$$\alpha_2 = a_0, \qquad \text{Término independiente del polinomio } p$$

Entonces

$$W = \text{gengen}\left[2x^2 + x,\ 1 - x^2\right].$$

Veamos que, los vectores $p_1(x) = 2x^2 + x$ y $p_2(x) = 1 - x^2$ son linealmente independientes, para ello consideramos la comnibación lineal

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1\big(2x^2 + x\big) + \alpha_2\big(1 - x^2\big) = 0x^2 + \mathbf{0}x + \mathbf{0},$$

puesto que,

$$\alpha_1 = \boldsymbol{a_1}, \qquad \text{Coeficiente del término } x \text{ del polinomio.} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \mathbf{0}$$

$$\alpha_2 = \boldsymbol{a_0}, \qquad \text{Término independiente del polinomio } p \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_2 = \mathbf{0},$$

es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, los vectores son L.I.

Luego, una base para W viene dada por

$$\beta = \left\{2x^2 + x,\ 1 - x^2\right\}$$

y la dimensión es $\dim W = 2$. ■

4. (3 ptos c/u) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones

(a) Sean H y W dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Sea

$$S = \Big\{ \boldsymbol{v} \in V \ / \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{w}, \quad \text{con} \quad \boldsymbol{h} \in H \quad \text{y} \quad \boldsymbol{w} \in W \Big\},$$

entonces S es un subespacio vectorial de V.

Solución : En primer lugar, veamos que $\boldsymbol{S \neq \varnothing}$.

Puesto que, H y W dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces $\mathbf{0} \in H$ y $\mathbf{0} \in W$, además

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0},$$

por lo que, concluimos que $\mathbf{0} \in S$.

Luego, $\boldsymbol{S \neq \varnothing}$.

Veamos, a continuación la **cerradura bajo la suma**.

Sean $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in S$, entonces, existen $\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2} \in H$ y $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2} \in W$, tales que

$$\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{w_1} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{h_2} + \boldsymbol{w_2}.$$

Entonces

$$\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} = \big(\boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{w_1}\big) + \big(\boldsymbol{h_2} + \boldsymbol{w_2}\big) = \big(\boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{h_2}\big) + \big(\boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{w_2}\big),$$

Como H y W son subespacios vectoriales, entonces ellos son cerrados bajo la suma, por lo que

$$\boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{h_2} = \boldsymbol{h'} \in H \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{w'} \in W,$$

así,

$$\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{h'} + \boldsymbol{w'},$$

hemos escrito al vector $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$ como la suma de dos vectores, uno en H y el otro en W, por lo que, concluimos $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} \in S$.

Luego S es **cerradura bajo la suma**.

Por último, veamos que S es **cerradura bajo la multiplicación por un escalar**.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar y $\boldsymbol{v} \in S$, entonces, existen $\boldsymbol{h} \in H$ y $\boldsymbol{w} \in W$, tales que

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{w}.$$

Entonces

$$\alpha \boldsymbol{v} = \alpha \big(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{w}\big) = \alpha \boldsymbol{h} + \alpha \boldsymbol{w},$$

como H y W son subespacios vectoriales, entonces ellos son cerrados bajo la multiplicación por un escala, por lo que

$$\alpha \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h_1} \in H \qquad \text{y} \qquad \alpha \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w_1} \in W,$$

así,

$$\alpha \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h_1} + \boldsymbol{w_1},$$

hemos escrito al vector $\alpha \boldsymbol{v}$ como la suma de dos vectores, uno en H y el otro en W, por lo que, concluimos que $\alpha \boldsymbol{v} \in S$.

Luego, S es cerrado bajo la **cerradura bajo la multiplicación por un escalar**.

Como se cumplen las tres condiciones, tenemos que S sea un subespacio de V.

Entonces, la proposición es **VERDADERA**. ■

(b) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ múltiplo escalar de $\boldsymbol{v}$, entonces se tiene que $\left|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\right| = \left|\boldsymbol{u}\right| + \left|\boldsymbol{v}\right|$.

Solución : CONTRAEJEMPLO. Sean $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, entonces $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$, es decir son vectores múltiplos escalares. Así,

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\left|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Por otra parte

$$\left|\boldsymbol{u}\right| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \left|\boldsymbol{v}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

de aquí,

$$\sqrt{2} = \left|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\right| \neq \left|\boldsymbol{u}\right| + \left|\boldsymbol{v}\right| = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Luego, la proposición es **FALSA**. ■

(c) Dados el plano $\pi : \dfrac{x}{2} - 2y + z - \sqrt{3} = 0$ y el punto $Q\left(1, 1, \dfrac{1}{2}\right)$. Entonces la ecuación cartesiana del plano que pasa por Q y es paralelo al plano π es $4y - x - 2z = 2$.

Solución : Tenemos que, el vector normal del plano π es $\boldsymbol{n} = \left(\dfrac{1}{2}, -2, 1\right)$ o equivalentemente $\boldsymbol{u} = \big(1, -4, 2\big)$.

Puesto que, el plano buscado es **paralelo** al plano π, entonces el vector normal del plano buscado es $\boldsymbol{u} = \big(1, -4, 2\big)$.

Sea $P\,(x, y, z)$ un punto genérico del plano buscado, así,

$$\big(1, -4, 2\big) \cdot \left(x - 1, y - 1, z - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

de aquí,

$$x - 1 - 4\big(y - 1\big) + 2\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 4y + 2z + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 4y + 2z = -2,$$

multiplicando por -1, se obtiene

$$-x + 4y - 2z = 2.$$

Luego, la proposición es **VERDADERA**. ■